TRƯỜNG THPT SƠN TÂY **ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG**

Năm học: 2018 - 2019

Môn thi: Toán Lớp: 10

Ngày thi: 18 tháng 3 năm 2019

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I *(5,0 điểm)* Giải phương trình $2\sqrt{-2x^2+11x-14}=x^3-5x^2+2x+14$.

Câu II *(5,0 điểm)* Cho bất phương trình $\sqrt[3]{x^4+x^2+m}-\sqrt[3]{2x^2+1}+x^2\left(x^2-1\right)>1-m$, trong đó m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình trên nghiệm đúng với mọi $x>1$.

Câu III *(5,0 điểm)* Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB=2AD$; điểm N thuộc cạnh AB sao cho $AN=\frac{1}{4}AB$. Gọi M là trung điểm CD; I là giao điểm của MN và BD. Hãy viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác BIN biết rằng $A(2;1)$; đường thẳng BD có phương trình $11x-2y+5=0$ và điểm B có hoành độ là số nguyên.

Câu IV *(3,0 điểm)* Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+d=2$. Chứng minh rằng

$$\frac{(a+c)^2}{ad+bc}+\frac{(b+d)^2}{ac+bd}+4\ge 4\left(\frac{a+b+1}{c+d+1}+\frac{c+d+1}{a+b+1}\right).$$

Câu V *(1,0 điểm)* Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn ω . P là điểm thuộc cạnh AC kéo dài (C nằm giữa A và P) sao cho PB,PD là các tiếp tuyến của đường tròn ω. Tiếp tuyến của ω tại C cắt PD tại Q và AD tại R . Gọi E là giao điểm thứ hai của AQ với ω. Chứng minh rằng ba điểm B,E,R thẳng hàng.

Câu VI *(1,0 điểm)* Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p;q)$ thỏa mãn $p\left(p^2-p-1\right)=q(2q+3)$.

-------------------**Hết**------------------

(Giám thị không giải thích gì thêm)

Họ và tên thí sinh:...Số báo danh:..

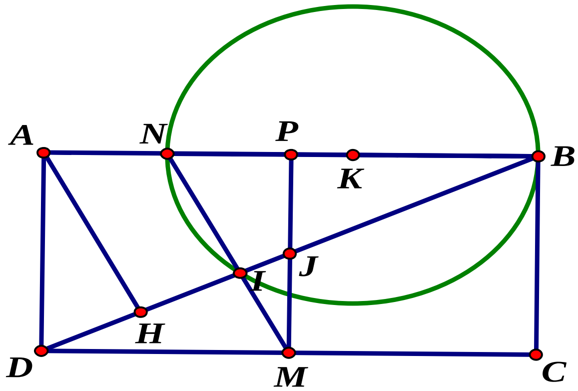
Họ và tên của giám thị:.. Chữ ký của giám thị:...............................

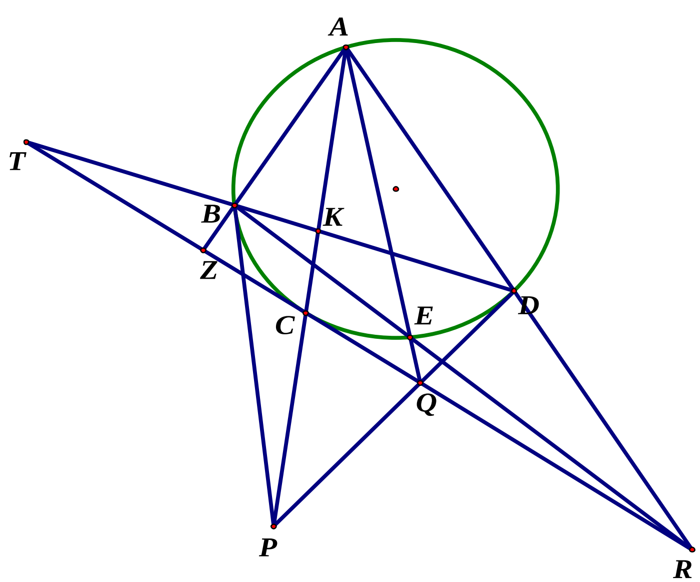
TRƯỜNG THPT SƠN TÂY **ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG**

Năm học: 2018 - 2019

Môn thi: Toán Lớp: 10

Câu	Nội dung	Điểm
I	Giải phương trình $2\sqrt{-2x^2+11x-14}=x^3-5x^2+2x+14$.	**5.0**
	Điều kiện xác định $2\le x\le \frac{7}{2}$ Áp dụng bất đẳng thức AM-GM $2\sqrt{-2x^2+11x-14}=2\sqrt{(x-2)(7-2x)}\le x-2+7-2x=5-x$	**1.0**
	Ta chứng minh $x^3-5x^2+2x+14\ge 5-x,\forall x\in\left[2;\frac{7}{2}\right]$	**1.0**
	$\Leftrightarrow x^3-5x^2+3x+9\ge 0\ \ \forall x\in\left[2;\frac{7}{2}\right]\Leftrightarrow (x-3)^2(x+1)\ge 0,\forall x\in\left[2;\frac{7}{2}\right]$ (luôn đúng)	**1.0**
	Vậy phương trình tương đương với $\begin{cases}x-2=7-2x\\x=3\end{cases}\Leftrightarrow x=3$	**2.0**
II	Cho bất phương trình $\sqrt[3]{x^4+x^2+m}-\sqrt[3]{2x^2+1}+x^2(x^2-1)>1-m$, trong đó m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình trên nghiệm đúng với mọi $x>1$.	**5.0**
	Đặt $a=\sqrt[3]{x^4+x^2+m}$, $b=\sqrt[3]{2x^2+1}\Rightarrow a^3-b^3=x^4-x^2+m-1$.	**1.0**
	BPT đã cho trở thành $a-b+a^3-b^3>0\Leftrightarrow (a-b)(a^2+b^2+ab+1)>0\Leftrightarrow a>b\Leftrightarrow a^3>b^3$.	**1.0**
	Khi đó yêu cầu bài toán chuyển thành tìm m để $x^4-x^2-1>-m,\forall x>1$	**1.0**
	Đặt $x^2=t,t>1$ ta được $t^2-t-1>-m,\forall t>1$	**1.0**
	Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t)=t^2-t-1$ trên $[1;+\infty)$ ta thu được $m\ge 1$.	**1.0**
III	Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB=2AD$; điểm N thuộc cạnh AB sao cho $AN=\frac{1}{4}AB$. Gọi M là trung điểm CD; I là giao điểm của MN và BD. Hãy viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác BIN biết rằng $A(2;1)$; đường thẳng BD có phương trình $11x-2y+5=0$ và điểm B có hoành độ là số nguyên.	**5.0**
	Gọi P là trung điểm AB và $J=PM\cap BD$.	**1.0**

	 Chứng minh được $\widehat{MNP}=\widehat{DJM}\Rightarrow MN\perp BD$	
	Gọi H là hình chiếu của A trên BD $\Rightarrow AH=d\left(A;BD\right)=\sqrt{5}$	**1.0**
	Mà $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AD^2}, AB=2AD\Rightarrow AB=5$. $B\in BD\Rightarrow B\left(t;\frac{11t+5}{2}\right), \begin{cases}AB=5\\ x_B\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow B\left(-1;-3\right)$.	**1.0**
	$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\Rightarrow N\left(\frac{5}{4};0\right)$	**1.0**
	Gọi K là trung điểm BN suy ra $\left(BIN\right)$ có tâm $K\left(\frac{1}{8};\frac{-3}{2}\right)$ và bán kính $R=KB=\frac{15}{8}$ nên có phương trình là $\left(x-\frac{1}{8}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{225}{64}$.	**1.0**
IV	Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+d=2$. Chứng minh rằng $$\frac{(a+c)^2}{ad+bc}+\frac{(b+d)^2}{ac+bd}+4\ge 4\left(\frac{a+b+1}{c+d+1}+\frac{c+d+1}{a+b+1}\right).$$	**3.0**
	Áp dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwartz $$\left[\frac{(a+c)^2}{ad+bc}+\frac{(b+d)^2}{ac+bd}+4\right]\left[\left(ad+bc\right)+\left(ac+bd\right)+1\right]\ge\left(a+b+c+d+2\right)^2=16$$ Tương đương với $\frac{(a+c)^2}{ad+bc}+\frac{(b+d)^2}{ac+bd}+4\ge\frac{16}{ad+bc+ac+bd+1}$	**1.0**
	Đặt $a+b=x;c+d=y\Rightarrow x+y=2$ và $x^2+y^2=4-2xy$	**1..0**

	Khi đó $VP=\dfrac{16}{ad+bc+ac+bd+1}=\dfrac{16}{xy+1}$ cần chứng minh $\geq 4\left(\dfrac{x+1}{y+1}+\dfrac{y+1}{x+1}\right)$ $\Leftrightarrow 4(x+1)(y+1)\geq(xy+1)\left[(x+1)^2+(y+1)^2\right]$	
	$\Leftrightarrow 4(xy+x+y+1)=4(xy+3)\geq(xy+1)(x^2+2x+1+y^2+2y+1)=(xy+1)(10-2xy)$ $\Leftrightarrow 4xy+12\geq 8xy-2(xy)^2+10$ $\Leftrightarrow (xy)^2+1\geq 2xy\,(AM-GM)$	**1.0**
IV	Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn ω. P là điểm thuộc cạnh AC kéo dài (C nằm giữa A và P) sao cho PB, PD là các tiếp tuyến của đường tròn ω. Tiếp tuyến của ω tại C cắt PD tại Q và AD tại R. Gọi E là giao điểm thứ hai của AQ với ω. Chứng minh rằng ba điểm B, E, R thẳng hàng.	**1.0**
	Cách 1. Gọi $T=BD\cap CR, K=AC\cap BD, Z=AB\cap CR$. Gọi $E'=BR\cap\omega,\ E'\neq B$. Ta chứng minh $E'\equiv E$. Thật vậy do tứ giác $ABCD$ điều hòa nên $(T,K;B,D)=-1$ $\Rightarrow (T,K;B,D)\xrightarrow{A}(T,C;Z,R)\xrightarrow{B}(D,C;A,E')=-1$, mặt khác tứ giác $ACED$ điều hòa nên ta cũng có $(D,C;A,E)=-1\Rightarrow E\equiv E'$. **Cách 2.** Để chỉ ra ba điểm B,E,R thẳng hàng ta sẽ chỉ ra AD, BE,CQ đồng quy. Gọi $CQ\cap AD=R, BE\cap AD=R'$, ta chứng minh $\dfrac{RD}{RA}=\dfrac{R'D}{R'A}\Rightarrow R'\equiv R$. 	**1.0**

	Do ΔPAD đồng dạng với ΔPDC và ΔPAB đồng dạng với ΔPBC nên ta có $\frac{AD}{DC}=\frac{PA}{PD}=\frac{PA}{PB}=\frac{AB}{BC}\Rightarrow AB.DC=BC.AD$, áp dụng định lý Ptolemy ta được $AB.DC=BC.AD=\frac{1}{2}CA.DB$. Hoàn toàn tương tự ta cũng có $CA.ED=CE.AD=\frac{1}{2}AE.DC$. Do đó $\frac{DB}{AB}=\frac{2DC}{CA}\quad(1)$ và $\frac{DC}{CA}=\frac{2ED}{AE}\quad(2)$. Mặt khác, ΔRDC đồng dạng với $\Delta RCA\Rightarrow\frac{RD}{RC}=\frac{DC}{CA}=\frac{RC}{RA}$, kết hợp với $(2)\Rightarrow\frac{RD}{RA}=\frac{RD.RA}{RA^2}=\left(\frac{RC}{RA}\right)^2=\left(\frac{DC}{CA}\right)^2=\left(\frac{2ED}{AE}\right)^2\ (3)$. Ta cũng có $\Delta ABR'$ đồng dạng với $\Delta EDR'$, $\Delta DBR'$ đồng dạng với $\Delta EAR'$ suy ra $\frac{R'D}{R'B}=\frac{ED}{AB};\frac{R'A}{R'B}=\frac{EA}{DB}$, kết hợp với $(1)\&(2)\Rightarrow\frac{R'D}{R'A}=\frac{ED.DB}{EA.AB}=\left(\frac{2ED}{AE}\right)^2\ (4)$. Từ $(3)\&(4)\Rightarrow\frac{RD}{RA}=\frac{R'D}{R'A}\Rightarrow R'\equiv R$.	
VI	Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p;q)$ thỏa mãn $p\left(p^2-p-1\right)=q\left(2q+3\right)$.	**1.0**
	:- Xét trường hợp $p=q\Rightarrow p^2-3p-4=\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}p=-1\\p=4\end{array}\right.$ không thỏa mãn. - Xét trường hợp $p\neq q\Rightarrow p\mid 2q+3\Rightarrow 2q+3=kp,\ k\in\mathbb{Z}^+\Rightarrow q=\frac{kp-3}{2}$ Thay vào điều kiện ta được $p\left(p^2-p-1\right)=\frac{kp-3}{2}.kp\Leftrightarrow 2\left(p^2-p-1\right)=k\left(kp-3\right)$ $\Leftrightarrow 2p^2-p\left(k^2+2\right)+3k-2=0$ có $\Delta=\left(k^2+2\right)^2-8\left(3k-2\right)$ Nhận thấy nếu $k\geq 11\Rightarrow\left(k^2+1\right)^2<\Delta<\left(k^2+2\right)^2$, do đó $k\leq 10$. Thay thử các giá trị của k thì nhận thấy chỉ $k=5$ thỏa mãn , khi đó $\Delta=625\Rightarrow p=13\&q=31$.	**1.0**